

$$2 f' (u^4)^3 \gamma^i = -s^i + 2 f' (u^4)^3 \{ (u^4)^2 v^i (v_k \gamma^k + \Gamma_{\mu, \nu}^i v^\mu v^\nu) - \Gamma_{\mu, \nu}^i v^\mu v^\nu \}. \quad (\text{A}, 5)$$

Die γ^k auf der rechten Seite können eliminiert werden, indem man (A, 5) skalar mit v_i multipliziert und $1 - (u^4)^2 v^i v_i = (u^4)^2 v_4$ benutzt; es wird dann:

$$2 f' (u^4)^5 v_k \gamma^k = -\frac{1}{v_4} v_i s^i + 2 f' (u^4)^3 \frac{1}{v_4} ((u^4)^2 \Gamma_{\mu, \nu}^i v_i v^i v^\nu - \Gamma_{\mu, \nu}^i v_i) v^\mu v^\nu.$$

Dies in (A, 5) eingesetzt ergibt schließlich:

$$2 f' (u^4)^3 \gamma^i = -s^i + v^i s^4 + 2 f' (u^4)^3 (v^i \Gamma_{\mu, \nu}^4 - \Gamma_{\mu, \nu}^i) v^\mu v^\nu$$

(siehe¹³), wobei wir $v^\mu s_\mu = 0$ benutzt haben. Endlich ersetzen wir noch s^i durch s_k : Wegen $s^\alpha = g^{\alpha\mu} s_\mu$ und $s_4 = -v^i s_i$ ist

$$s^\alpha = (g^{\alpha k} - v^k g^{\alpha 4}) s_k \quad (\text{A}, 6)$$

und damit

$$2 f' (u^4)^3 \gamma^i = (-g^{ik} + v^k g^{i4} + v^i g^{k4} - v^i v^k g^{44}) s_k + 2 f' (u^4)^3 (v^i \Gamma_{\mu, \nu}^4 - \Gamma_{\mu, \nu}^i) v^\mu v^\nu. \quad (\text{A}, 7)$$

Durch (A, 7) haben wir γ^i als Funktion von z^i , v^i , s_i und t dargestellt.

¹³ Durch Multiplikation dieser Beziehung mit s_i entsteht die in § 4 angeführte Gleichung für $2 f' (u^4)^3 \gamma^i s_i$.

Die Wechselwirkung vieler Teilchen

I. Allgemeine Theorie

Von HERMANN KÜMMEL

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin

(Z. Naturforschg. 10a, 117—125 [1955]; eingegangen am 10. Januar 1955)

Es wird die Bethe-Salpeter-Gleichung für N gleiche Teilchen abgeleitet. Die Lösungstheorie wird hinsichtlich der bei vielen Teilchen vorliegenden spezifischen Probleme diskutiert. Bei Beschränkung auf nichtrelativistische Teilchen und die niedrigste Näherung geht die Bethe-Salpeter-Gleichung in die Hartree-Fock'schen Gleichungen über. Die Beziehungen zur verallgemeinerten „self-consistent-field-Methode“ von Kinoshita und Nambu werden untersucht und eine einfache Begründung derselben angegeben.

Die Beschreibung der Wechselwirkung vieler Teilchen ist in jüngerer Zeit mehrfach mit modernen Methoden erneut in Angriff genommen worden^{1, 2}. Man kann aber nicht sagen, daß eine restlos befriedigende Beseitigung der Schwierigkeiten gelungen ist, die daher rühren, daß zwar — vielleicht — die Wechselwirkung nur zweier Teilchen als klein angesehen werden kann, daß jedoch bei sehr vielen fast jede Näherungsannahme bedenklich ist. Die vorliegende Arbeit kann an diesem Tatbestand nur insofern etwas ändern, als sie eine einfache Formulierung des Problems gibt, jedoch zur Lösung nur Vorschläge macht.

Die besonderen Verhältnisse bei dem betrachteten Problem sind durch folgende drei Punkte zu charakterisieren:

1. Infolge der Wechselwirkung mit vielen Teilchen zu allen Zeiten verliert der Begriff des „freien Teilchens“ vollkommen seinen Sinn. Das drückt sich mathematisch darin aus, daß Wellenfunktionen freier Teilchen nicht als Näherung der vollständigen Funktion angesehen werden dürfen.

2. Es können Bindungszustände zwischen zwei oder mehr Teilchen auftreten. Dies wirkt sich ebenso aus wie Punkt 1.

3. Selbst bei kleiner Kopplungskonstanten g wird es nicht möglich sein, diese zur Grundlage einer Entwicklung (Iteration) zu machen; denn dies würde etwa bedeuten, daß man nach Ng (mit N = Zahl der Teilchen) entwickelt, einer Zahl, die i. a. nicht klein sein wird.

Man kann nun die Schwierigkeiten zu umgehen versuchen, indem man durch eine geeignete kanonische Transformation (Bohm und Pines¹) neue Variable einführt, deren einer Teil die kollektive Bewegung, deren anderer die individuelle Bewegung einzelner Teilchen (d. h. die Abweichungen von dem durch die kollektive Bewegung charakterisierten mittleren Verhalten) beschreibt. Bei Kräften, die bei geringen Entfernungen sehr groß werden, versagt diese Methode bekanntlich.

Neuerdings haben Kinoshita und Nambu einen anderen Weg eingeschlagen: Um bei der störungstheoretischen Entwicklung möglichst kleine

¹ D. Bohm u. D. Pines, Phys. Rev. 85, 338 [1952]; 92, 609 [1953].

² T. Kinoshita u. Y. Nambu, Phys. Rev. 94, 598 [1954].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Störungsglieder zu erhalten, wird die Lagrange-Funktion $L = L_0 + L_{\text{int}}$ in $L = L_0' + L_{\text{int}}'$ aufgeteilt; hier ist ein nichtlokaler Operator zu L_0 addiert bzw. von L_{int} subtrahiert, derart, daß L_{int}' möglichst „klein“ wird: Die Matricelemente zu einem Teil der Wechselwirkung beliebig hoher Ordnung kommen dann in L_{int}' nicht mehr vor. Durch diese Forderung werden die nichtlokalen Funktionen festgelegt. Dann läßt sich die Entwicklung nach der Kopplungskonstanten eher rechtfertigen. Wegen der bekannten Schwierigkeiten, zu einem nichtlokalen L_{int}' einen Hamilton-Operator H_{int}' zu finden³, ist aber eine genauere Begründung dieser Methode notwendig. Die Berechnung der Energie und einer geeignet zu wählenden Wellenfunktion wird sehr kompliziert. Da explizit von der S -Matrix (bzw. vom Operator $U(0, -\infty)$) Gebrauch gemacht wird, versagt sie bei der Berücksichtigung von Bindungszuständen zwischen zwei oder mehreren der Teilchen. Hiermit hängt zusammen, daß man in nullter Näherung die Wellenfunktion durch eine Slater-Determinante aus Einteilchenwellenfunktionen ersetzen muß (vgl. hierzu die Bemerkungen der Autoren im Abschnitt 4A der zitierten Arbeit).

Es soll hier gezeigt werden, wie man mit der Methode der Wellenfunktionen der Quantenfeldtheorie^{4, 5} mit den Problemen fertig werden kann. Denn sie ist ja unabhängig von der Reichweite der Kräfte anwendbar, sie vermeidet die Einführung eines nichtlokalen Feldes und sie ist ferner so ausgereift, daß man sie als verhältnismäßig einfach empfindet. Sie ist geradezu prädestiniert zur Berücksichtigung der Bindungszustände bzw. des Umstandes, daß es keine freien Teilchen gibt. Diese Methode wird auch eine andere Formulierung und Begründung der Theorie von Kinoshita und Nambu gestatten und dabei sichtbar werden lassen, warum diese in manchen Fällen versagt.

1. Allgemeines

Als Beispiel betrachten wir pseudoskalare Mesonen mit pseudoskalarer Kopplung an Nukleonen. Die Feldgleichungen lauten ($\hbar = c = 1$; $\tilde{A}(x) = \text{äußeres Feld}$; $i g \gamma_5 = \gamma_5'$):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \gamma_\nu - i \gamma_5 \tilde{A}(x) + m \right) \cdot \psi &= \gamma_5 A(x) \psi(x). \quad (\text{l.c.}^6), \\ (\square - \kappa^2) A(x) &= \frac{1}{2} [\psi(x), \bar{\psi}(x)] \gamma_5'. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Der Hamilton-Operator hat die Form:

$$H = H_0(t) + H_{\text{int}}(t) \quad (2)$$

$$\text{mit } H_{\text{int}}(t) = -\frac{1}{2} \int [\bar{\psi}(x), \gamma_5' \psi(x)] d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Diese Aufteilung (mit endlichem m, κ^2) läßt die Selbstenergie unberücksichtigt.

Die Wechselwirkungsdarstellung hängt mit der Heisenberg-Darstellung nach

$$\left. \begin{aligned} O(t) &= U(t, 0) O(t) U^*(t, 0), \\ \Phi(t) &= U(t, 0) \Phi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

zusammen ($O = \text{Operator}$, $\Phi = \text{Zustand}$). $U(t, t')$ ist die Dysonsche Entwicklung⁷:

$$U(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \dots dt_n T[H_{\text{int}}(1) \dots H_{\text{int}}(n)]. \quad (5)$$

Wir definieren das Vakuum (mit $P_\nu = \text{Energie-Impulsvektor}$) durch

$$P_\nu \Omega = 0. \quad (6)$$

Das „Vakuum der freien Teilchen“ ist definiert durch

$$O^{(+)}(t) \Omega(t) = 0 \quad (7)$$

(mit $O^{(+)} = \text{Vernichtungsoperator}$). Es wird dann⁸

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= U(0, -\infty) \Omega_0, \\ \Phi &= U(0, -\infty) \Phi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(wenn wir $\Omega_0 = \Omega(-\infty)$ und $\Phi = \Phi(-\infty)$ setzen). Durch

$$S_+(x, x') = -(\Omega_0, T((\psi(x) \psi(x')) \Omega_0)) \quad (9)$$

und

$$\Delta_+(x, x') = (\Omega_0, T(A(x) A(x')) \Omega_0)$$

sind die Funktionen Δ_+ und S_+ definiert; die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} S_+'(x, x') &= -(\Omega, T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) \Omega), \\ \Delta_+'(x, x') &= (\Omega, T(A(x) A(x')) \Omega) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

lassen sich nach Dyson⁷ entwickeln. Sie lassen sich charakterisieren durch die Gesamtheit aller

³ Chr. Möller u. P. Christensen, Dan. Mat. Fys. Medd. **27**, No. 7 [1952].

⁴ E. Freese, Z. Naturforschg. **8a**, 776 [1953].

⁵ W. Zimmermann, Suppl. Nuov. Cim. **11**, 43 [1954].

⁶ Die fetten Typen bezeichnen Größen in der Heisenberg-Darstellung.

⁷ F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 [1949].

⁸ V. Glaser u. W. Zimmermann, Z. Phys. **134**, 346 [1953].

„Ein-Nukleonengraphen“ (s. Abb. 1). Wir schließen uns in der Nomenklatur im wesentlichen an Zimmermann⁵ an. Wir bezeichnen einen Graphen als irreduziblen Ein-Nukleonengraphen, wenn man ihn durch eine Linie, die genau eine Nukleonlinie (und keine Mesonenlinie) schneidet, nicht in

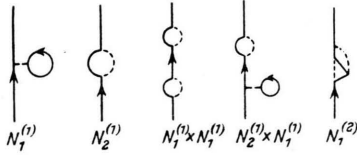


Abb. 1. Die irreduziblen 1-Nukleonengraphen $N_1^{(1)}$, $N_2^{(1)}$ und $N_1^{(2)}$ und die reduzierbaren 1-Nukleonengraphen $N_1^{(1)} \times N_1^{(1)}$ und $N_2^{(1)} \times N_1^{(1)}$.

zwei Ein-Nukleonengraphen aufspalten kann, die innere Linien enthalten. Man sieht, daß in niedrigster Näherung nur Graphen $N_1^{(1)}$ und $N_2^{(2)}$ (Selbst-

energiegraph) vorkommen. Der Graph $N_1^{(1)}$ enthält als Faktor die Funktion $S_+(x, x)$; diese gibt nur bei Anwesenheit eines äußeren Feldes einen Beitrag, wenn man die aus der Eichinvarianz resultierende Symmetrieforderung (unter Mißachtung aller Divergenzen) in üblicher Weise strapaziert⁹. Nun läßt sich jeder Selbstenergiegraph vom Typ $N_2^{(1)}$ und $N_1^{(2)}$ usw. darstellen durch (s. Abb. 2)

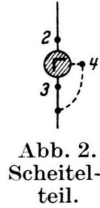


Abb. 2. Scheitelteil.

$$\int S_+(1, 3) \Delta_+(1, 4) \Gamma(2, 3; 4) dx_3 dx_4,$$

wobei $\Gamma(2, 3; 4)$ den üblichen Scheitelteil bedeutet (vgl. Dyson¹⁰). D. h. jeder Selbstenergiegraph läßt sich durch „Auflösung“ eines Scheitels gewinnen. Es ist dann leicht zu sehen, daß man die Gesamtheit aller Strahlungskorrekturen erfaßt, wenn S_+ , Δ_+ die Integralgleichungen

$$S_+'(1, 2) = S_+(1, 2) - \int S_+(1, 3) \gamma_5' \Delta_+(3, 4) \gamma_5' S_+'(4, 4) S_+'(3, 2) dx_3 dx_4 - \int S_+(1, 3) S_+'(3, 4) \Delta_+'(3, 6) \Gamma(4, 5; 6) S_+'(5, 2) dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 \quad (11a)$$

$$\text{und } \Delta_+'(1, 2) = \Delta_+(1, 2) - i \int \Delta_+(1, 3) \gamma_5' S_+'(3, 4) \Gamma(4, 5; 6) S_+'(5, 3) \Delta_+'(5, 2) dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 \quad (11b)$$

erfüllen. — Diese Integralgleichungen werden durch Abb. 3a und 3b veranschaulicht. Der Beweis ergibt sich leicht, wenn man nach S_+ bzw. Δ_+ iteriert.

Aus (11a) folgt die Differentialgleichung

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - e \tilde{A}_\nu \right) \gamma_\nu - m \right]_1 S_+'(1, 2) = i \delta(1, 2) - i \int \gamma_5' \Delta_+(1, 3) \gamma_5' S_+'(3, 3) S_+'(1, 2) dx_3 - i \int S_+'(1, 3) \Delta_+'(1, 4) \Gamma(3, 5; 4) S_+'(5, 2) dx_3 dx_4 dx_5. \quad (11c)$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für Δ_+ .

2. Bethe-Salpeter-Gleichung für N Nukleonen

Wir definieren die Wellenfunktion^{4, 5} für N Nukleonen durch

$$\varphi_{|N|} = \varphi(|1 \dots N|) = (\Omega, : \phi_{a_1}(1) \dots \phi_{a_N}(N) : \Phi). \quad (12)$$

Dabei stellt Φ einen Heisenberg-Zustand (bestimmter Energie) dar. Das Symbol: $A B \dots$ ist definiert durch die Umkehrung der Wickschen Zerlegung¹¹ eines T -Produktes nach Normalprodukten (die allgemeinen Gleichungen siehe bei Freese⁴, den zugehörigen Beweis bei Freese¹²). In unserem Fall verschwinden die Kontraktionen, und es ist

$$\varphi_{|N|} = \tau_{|N|} = (\Omega, T(\phi_{a_1}(1) \dots \phi_{a_N}(N)) \Phi). \quad (12a)$$

⁹ J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 [1951].

¹⁰ F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 [1949].

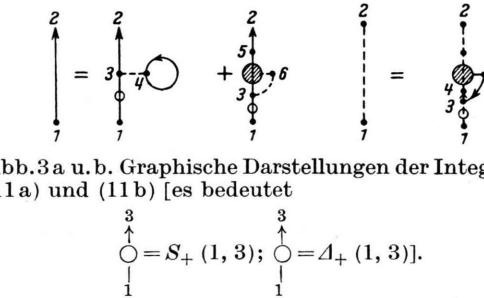


Abb. 3a u. b. Graphische Darstellungen der Integralgl. (11a) und (11b) [es bedeutet

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \bigcirc \\ \downarrow \end{array} = S_+(1, 3); \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \bigcirc \\ \downarrow \end{array} = \Delta_+(1, 3)].$$

Wegen (4) und (8) kann man (12a) in

$$\varphi_{|N|} = (\Omega_0, U(-\infty, 0) U(0, 1) \psi_{\alpha_1}(1) U(1, 0) U(0, 2) \psi_{\alpha_2}(2) \dots \psi_{\alpha_N}(N) U(N, 0) U(0, -\infty) \Phi(-\infty))$$

umformen und erhält Gl. (13):

¹¹ G. C. Wick, Phys. Rev. **80**, 268 [1950].

¹² E. Freese, Act. Phys. Austr., **8**, 289 [1954].

$$\varphi_{|N|} = \frac{1}{c_v} \sum \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1' \dots dt_n' \quad (13)$$

$$\cdot (\Omega_0, T \{ H_{\text{int}}(1') \dots H_{\text{int}}(n') \psi_{\alpha_1}(1) \dots \psi_{\alpha_N}(N) \} \Phi),$$

wenn man (5) und die Gleichung

$$U(\infty, -\infty) \Omega_0 = c_v \Omega_0 \quad (c_v^{-1} = c_v^*) \quad (14)$$

benutzt ($c_v = c$ -Zahl); sie folgt aus den Erhaltungssätzen von Energie und Impuls.

Wir bezeichnen einen Graphen als N -Nukleonengraphen, wenn er aus N einlaufenden und N auslaufenden Nukleonlinien besteht.

Ein N -Nukleonengraph heißt (mehrzeitig) irreduzibel, wenn man ihn nicht durch eine Linie, die

1. genau N -Nukleonlinien einmal,
2. keine Mesonenlinie schneidet,

so zerlegen kann, daß zwei N -Nukleonengraphen entstehen. Abb. 4 zeigt die (irreduziblen) Nukleonengraphen erster Ordnung.

Wie Gell-Mann und Low¹³ können wir dann folgern, daß $\varphi_{|N|}$ die Bethe-Salpeter-Gleichung für N Nukleonen

$$\varphi_{|N|}(|1 \dots N|) = \varphi_{|N|}^{(0)}(|1 \dots N|) + \int G(1 \dots N; 1' \dots N') \varphi_{|N|}(|1' \dots N'|) dx_1' \dots dx_{N'}' \quad (15)$$

erfüllt, wenn

$$G(1, \dots, N; 1' \dots N') = \sum_i G_i(1 \dots N; 1' \dots N') \quad (16)$$

(mit G_i = irreduzibler N -Nukleonengraph)

und

$$\varphi_{|N|}^{(0)}(|1 \dots N|) = (\Omega_0, T(\psi(1) \dots \psi(N)) \Phi) \quad (17)$$

ist. $\varphi_{|N|}^{(0)}$ läßt sich (bei Streuzuständen) als Determinante von Einteilchen-Wellenfunktionen schreiben. Die Summe geht über alle irreduziblen Graphen. Der Beweis ergibt sich fast unmittelbar durch Iteration: Aus den irreduziblen Graphen können wir alle reduzierbaren aufbauen; z. B. lassen sich durch $G_1^{(1)}$ der Abb. 4 alle Graphen vom Typ der Abb. 5 gewinnen; wenn wir also zunächst nur Graphen dieses Typs berücksichtigen, so ist die Integralgleichung offensichtlich richtig; bei allen anderen sowie bei aus verschiedenen irreduziblen

Bestandteilen zusammengesetzten Graphen kann man offenbar genau so schließen.

Ist Φ ein Bindungszustand Φ_g , so ist

$$\varphi_{|N|}^{(0)}(|1 \dots N|) \equiv 0$$

(wegen der Orthogonalität von Φ_g zu Streuzuständen). Obwohl obige Ableitung von der Iteration Gebrauch macht, werden wir doch — wie üblich — die Integralgleichung ohne Einschränkung als richtig ansehen. Man kann sie auch ohne Umweg über die Wechselwirkungsdarstellung beweisen (für zwei Nukleonen s. Zimmermann⁵), indem man aus dem Integralgleichungssystem für alle Wellenfunktionen alle Wellenfunktionen außer $\varphi(|1 \dots N|)$ eliminiert. So gilt die Gleichung allgemein, ohne jede Einschränkung (wenn wir vorerst von Renormierungsproblemen absehen).

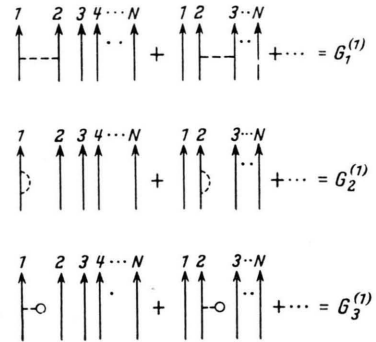


Abb. 4. Die Graphen 1. Ordnung.

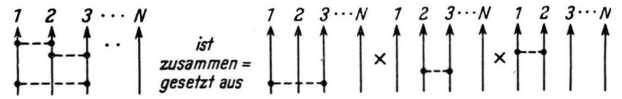


Abb. 5. Entstehung von Wechselwirkungen hoher Ordnung durch Graphen 1. Ordnung.

Unter Benutzung der Gl. (11) läßt sich (15) auch in die Form

$$\varphi_{|N|}(|1 \dots N|) = \varphi_{|N|}^{(0)}(|1 \dots N|) + \int \tilde{G}(1 \dots N; 1' \dots N') \varphi_{|N|}(|1' \dots N'|) dx_1' \dots dx_{N'}' \quad (18)$$

bringen, wobei \tilde{G} durch die Summe aller irreduziblen „Skelette“ definiert ist:

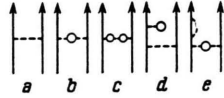
$$\tilde{G} = \sum_i \tilde{G}_i, \quad (19)$$

und $\tilde{\varphi}$ sich wieder als Determinante von Einteilchenwellenfunktionen mit allen Strahlungskorrekturen schreiben läßt. Das soll heißen: Man ersetze in den Graphen G_i überall S_+ durch S_+ und Δ^+

¹³ M. Gell-Mann u. F. Low, Phys. Rev. **84**, 350 [1951].

durch Δ_+ . Die Irreduzibilität definieren wir nur hinsichtlich Graphen, die keine Einteilchenkorrekturen mehr erhalten. Ein Teil der zu dem Skelett (a) gehörigen Graphen zeigt Abb. 6. Geht man

Abb. 6. Alle Graphen gehören zu demselben durch (a) charakterisierten Skelett.



noch einen Schritt weiter und ersetzt alle inneren Punkte durch Scheitelteile und alle Systeme von Mesonenlinien durch M-Teile (s. Abb. 7), so kann man die Bethe-Salpeter-Gleichung renormieren, indem man für S_+ , Δ_+ , $\Gamma(1, 2; 3)$ und M-Teile, die nach Dyson renormierten Funktionen einsetzt (Zimmermann¹⁴).

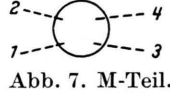


Abb. 7. M-Teil.

3. Diskussion der Bethe-Salpeter-Gleichung

Eine wichtige Eigenschaft der Funktion φ ist^{13, 4}

$$i \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_\nu(i)} \varphi_{|N|}(|1 \dots N|) = P_\nu' \varphi(|1 \dots N|). \quad (20)$$

Dies erlaubt bei Kenntnis von φ , die Eigenwerte P_ν' zum Viererimpuls zu bestimmen und den Schwerpunkt in Raum und Zeit als Faktor $e^{i(\mathfrak{P}\mathfrak{R}-ET)}$ abzutrennen. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (6) und

$$[P_\nu, O] = i \frac{\partial}{\partial x_\nu} O. \quad (21)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß Energie - Impulserhaltung gilt, daß also kein äußeres Feld vorliegt. Ist dagegen ein solches zeitlich konstantes Feld vorhanden, so gilt Gl. (20) nur für die Energie ($\nu = 4$).

Eine zweite für uns wichtige Eigenschaft ist:

$$\begin{aligned} \varphi_{|N|}^{(0)} &\approx \varphi(|1 \dots N|) = \varphi^{(0)}(|1 \dots N|) + \int (G_1^{(1)} + G_2^{(1)} + G_3^{(1)})(1 \dots N; 1' \dots N') \varphi^{(0)}(|1' \dots N'|) dx_1' \dots dx_{N'}' \\ &= \varphi^{(0)}(|1 \dots N|) - i \sum_{i < k}^N \int dx_i' dx_k' S_+(i, i') \gamma_5' S_+(k, k') \gamma_5' \Delta_+(i', k') \varphi^{(0)}(|1 \dots i' \dots k' \dots N|) \\ &- i \sum_i^N \int dx_i' dx_{i'}' \{ \Delta_+(i, i') \gamma_5' S_+(i'', i'') + \Delta_+(i, i'') \gamma_5' S_+(i, i') \} \gamma_5' S_+(i'', i') \varphi^{(0)}(|1 \dots i' \dots N|) \end{aligned} \quad (24)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \varphi_{|N|} &\approx \tilde{\varphi}^{(0)}(|1 \dots N|) = \tilde{\varphi}^{(0)}(|1 \dots N|) + \int \tilde{G}_1^{(1)}(1 \dots N; 1' \dots N') \tilde{\varphi}^{(0)}(|1' \dots N'|) dx_1' \dots dx_{N'}' \\ &= \tilde{\varphi}^{(0)}(|1 \dots N|) \sum_{i < k} \int dx_i' dx_k' S_+'(i, i') \gamma_5' S_+'(k, k') \gamma_5' \Delta_+'(i', k') \tilde{\varphi}^{(0)}(|1 \dots i' \dots k' \dots N|). \end{aligned} \quad (25)$$

¹⁴ W. Zimmermann, Suppl. Nuovo. Cim. **11**, 106 [1954].

$$\begin{aligned} \varphi(|1 \dots N|) \\ t_1 = t_2 = \dots = t_N = -\infty \\ = \frac{1}{c_\nu} (\Omega_0, U(\infty, -\infty) \psi(r_1, -\infty) \dots \psi(r_N, -\infty) \Phi) \\ = ||u_i(r_k)||. \end{aligned} \quad (22)$$

Sie gilt, wenn $\Phi = \bar{\psi}(k_1) \dots \bar{\psi}(k_N) \Omega_0$ (mit $\psi(x) = \sum_k u_k(x) \psi(k)$ einen Zustand freier Teilchen bedeutet. $u_i(x) = u_i(r) e^{-i\omega_i t}$ ist definiert durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \gamma_\nu - m \right) u_i(x) &= 0 \\ \left(\text{bzw.} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - e \tilde{A}_\nu \right) \gamma_\nu - m \right] u_i(x) = 0 \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Da die Funktion φ also für $t_j \rightarrow -\infty$ (und für $g \rightarrow 0$) in die übliche Slater-Determinante (aus ungestörten Eigenfunktionen) übergeht, wird man sie als relativistische Verallgemeinerung der Wellenfunktion ansehen dürfen. (Die Stetigkeit unseres speziellen φ ist trivial.) Man faßt sie auch bei Bindungszuständen Φ_g als solche auf. Jedoch ist klar, daß es auch noch andere Verallgemeinerungen geben kann. Ein Vorteil gegenüber anderen Verfahren der Feldtheorie ist, daß man nicht ausschließlich auf störungstheoretische Methoden angewiesen ist, wenn man φ als Grundlage zur Beantwortung physikalischer Fragen benutzt. Wenn man z. B. allein die Graphen $G_i^{(1)}$ der Abb. 4 heranzieht, so werden in der Integralgleichung alle Wechselwirkungen höherer Ordnung vom Typ der Abb. 5 berücksichtigt. Löst man also diese genäherte Integralgleichung (nicht durch Iteration, sondern) durch ein geeignetes Verfahren, das nicht auf der Entwicklung nach der Kopplungskonstanten beruht, so sind schon wesentliche Teile der Wechselwirkungen höherer Ordnung eingeschlossen. Diese Näherungsgleichung lautet:

An dieser Stelle wird deutlich, daß jede gewöhnliche Störungstheorie versagt: Die Integrale enthalten $(N/2)$ -Glieder, so daß man für große N den Kopplungsparameter $\sim N^2/2 g^2$ hat. Andererseits ist es für manche Fälle sicher möglich, (24) oder (25) näherungsweise ohne Entwicklung nach g^2 zu lösen, denn der Kern ist, da er aus $(N/2)$ im wesentlichen gleichen Gliedern besteht, relativ unkompliziert. Konsequenterweise wird man dann als nullte Näherung das hierdurch gewonnene $\varphi^{(0)}$ annehmen. In diesem Sinn ist also die „ungestörte Bewegung“ charakterisiert durch den Austausch von nur einem Meson gleichzeitig; Abweichungen hiervon, Abweichungen vom mittleren Verhalten also, lassen sich durch die höheren Näherungen erfassen: Wenn der größte Teil der Bewegung bereits von der obigen nullten Näherung erfaßt ist, wird man die nächsten Näherungen durch Iteration nach diesem $\varphi^{(0)}$ berechnen dürfen (nicht nach $\varphi^{(0)}$). So geht nirgends die Wellenfunktion $\varphi^{(0)}$ als *Näherung* ein, und es ist dem Umstand Rechnung getragen, daß es keine freien Teilchen gibt.

Wir setzen also

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} = \tilde{\varphi}^{(0)} + \tilde{\varphi}^{(1)} \quad (26)$$

und

$$G = \sum_{i=1}^3 G_i^{(1)} + G' \quad (\tilde{G} = \tilde{G}^{(1)} + \tilde{G}'). \quad (27)$$

Die resultierende Integralgleichung

$$\begin{aligned} & \varphi^{(1)}(|1 \dots N|) \\ &= \int G'(1, \dots, N; 1' \dots N') \varphi^{(0)}(|1 \dots N'|) dx_1' \dots dx_{N'}' \\ &+ \int G(1, \dots, N; 1' \dots N') \varphi^{(1)}(|1 N'|) dx_1' \dots dx_{N'}' \quad (28) \end{aligned}$$

können wir dann durch Iteration nach dem ersten Glied der rechten Seite lösen, wenn die inhomogene Bewegung einen wesentlichen Teil ausmacht.

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\mathfrak{p} - e \tilde{\mathfrak{U}})^2 + \tilde{V} \right]_1 \sum (-1)^P \varphi_{i1}(1) \varphi_{iN}(N) \\ &= \sum_{k=2}^N e^2 \int \Delta_+(1, k) S_+(k, k') \sum (-1)^P \varphi_{i1}(1) \dots \varphi_{ik}(k') \dots \varphi_{iN}(N) dx_k' \\ &- i \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\mathfrak{p} - e \tilde{\mathfrak{U}})^2 + \tilde{V} \right)_1 \sum_{k=2 \dots N} (-1)^P \varphi_{i1}(1) e^2 \int dx_k dx_l S_+(k, k') \Delta_+(k', l') S_+(l', l) \\ &\quad \times \varphi_{i2}(2) \dots \varphi_{ik}(k') \dots \varphi_{il}(l') \dots \varphi_{iN}(N). \end{aligned}$$

Hier ist das letzte Glied nach unserer Näherungsannahme wegzulassen, da man für

Wenn letzteres nicht der Fall ist, muß man nach demselben Verfahren wie für $\varphi^{(0)}$ weiterrechnen usw.

4. Vergleich mit anderen Theorien

A) Hartree-Focksche Gleichungen

Wir betrachten den nichtrelativistischen Grenzfall der Quantenelektrodynamik. Dann wird

$$e^2 \Delta_+(x, x') \rightarrow \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t - t') = V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (29)$$

$$S_+(x, x') \rightarrow S_{\text{ret}}(x, x') = \begin{cases} \sum_i u_i^*(x') u_i(x), & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases} \quad (30)$$

$$\left[\frac{1}{2m} (\mathfrak{p} - e \tilde{\mathfrak{U}})^2 + \tilde{V} \right] u_i(x) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} u_i(x) = E_i u_i(x). \quad (31)$$

Weiter machen wir die Vernachlässigungen:

a) alle Wechselwirkungen mit e^4, e^6 usw. werden weggelassen;

b) die Wellenfunktion hat die Form

$$\varphi(|1 \dots N|) = \sum_{Pi} (-1)^{Pi} \varphi_{i1}(1) \dots \varphi_{iN}(N) \quad (32)$$

mit $(\varphi_i(t), \varphi_k(t)) = \delta_{ik}$, $\sum_{Pi} =$ Summe über alle Permutationen, der Indizes i_λ .

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist die Paar-erzeugung auszuschließen; außerdem lassen wir die (singuläre) Wechselwirkung der Elektronen mit sich selbst weg. Beides hat zur Folge, daß wir in unserer Näherung nur den Graphen $G_1^{(1)}$ der Abb. 4 zu berücksichtigen haben. Dann nimmt die Integralgl. (24) nach Anwendung von

$$\left[-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\mathfrak{p} - e \tilde{\mathfrak{U}})^2 + \tilde{V} \right]_1$$

die Form an:

$$\left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} + (\mathfrak{p} - e \tilde{\mathfrak{U}})^2 + \tilde{V} \right) \varphi_{i1}(1)$$

wieder die rechte Seite der Integralgleichung einsetzen kann und dies Glieder in e^4 gibt. Bilden wir nun das innere Produkt mit $\varphi_2(2) \dots \varphi_N(N)$, wobei die Indizes $2 \dots N$ bedeuten, daß die $i_2 \dots i_N$ eine ganz bestimmte feste Indexreihe bilden, und setzen $t = t_1 = \dots = t_N$, so resultiert [wegen $\lim_{t \rightarrow t' + 0} S_{\text{ret}}(x, x') = \delta(r - r')$] die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left(-i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e \tilde{\mathbf{A}})^2 + \tilde{V} \right)_1 \varphi_1(1) \\ &= - \sum_{i=2}^N \int \varphi_i^*(2) V(1, 2) \varphi_i(2) dx_2 \varphi_1(1) \quad (33) \\ &+ \sum_{i=2}^N \int \varphi_i^*(2) V(1, 2) \varphi_1(2) dx_2 \varphi_i(1). \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz

$$\varphi_i = \varphi_i^0 e^{i\omega_i t} \quad (34)$$

folgt wegen (21) und (32) für die Gesamtenergie

$$E \approx \sum \omega_i.$$

Man erhält also die Hartree-Fock'schen Gleichungen. Um eine bessere Näherung für E zu bekommen, bilden wir mit der oben gefundenen Eigenfunktion den Erwartungswert des Hamilton-Operators

$$\begin{aligned} H &= \int \psi^* \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e \tilde{\mathbf{A}})^2 + \tilde{V} \right] \psi d\mathbf{r} \quad (35) \\ &- \frac{1}{2} \int \psi^*(1) \psi(2) V(1, 2) \psi(1) \psi(2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

und erhalten die bekannte genauere Relation

$$\begin{aligned} E &= \sum \omega_i - \sum_{i,k} \int |\varphi_i(1)|^2 V(1, 2) |\varphi_k(2)|^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ &+ \sum_{i,k} \int \varphi_i^*(1) \varphi_i(2) V(1, 2) \varphi_k^*(1) \varphi_k(2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (36) \end{aligned}$$

Die statistische Methode von Thomas und Fermi läßt sich bekanntlich (s. Dirac¹⁵) aus den Hartree-Fock'schen Gleichungen herleiten, ist also ebenfalls in der allgemeinen Theorie enthalten.

B. Die Theorie von Kinoshita und Nambu

Kinoshita und Nambu² gehen, wie eingangs erwähnt, von einer nichtlokalen Energiezerlegung aus und erhalten Fortpflanzungsfunktionen, die („nichtlokalen“) Integralgleichungen genügen. Diese bilden die Grundlage ihrer Methode.

Dasselbe läßt sich jedoch unter Vermeidung des nichtlokalen Formalismus direkter erreichen, wenn man die Integralgleichungstheorie der Wellenfunktionen benutzt.

Wir betrachten dazu (wie die Autoren) nicht-relativistische Elektronen bzw. Nukleonen in Wechselwirkung mit einem relativistischen Mesonenfeld, also den Lagrange-Operator

$$L = i \dot{\psi}^* \dot{\psi} - \frac{1}{2m} \dot{\psi}^* \Delta \dot{\psi} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A \right)^2 + \mu^2 A^2 \right\} - g \dot{\psi}^* \dot{\psi} A. \quad (37)$$

Es liege nun ein Zustand Φ vor, von dem wir voraussetzen:

$$\Phi = U(0, -\infty) \Phi \text{ existiert} \quad (38)$$

$$\text{mit}^{16} \quad \Phi = \psi^*(k_1) \dots \psi^*(k_N) \Omega_0. \quad (39)$$

Die erste Gleichung besagt, daß Φ kein gebundener Zustand ist (vgl. Glaser und Zimmermann⁸, die zweite, daß der Zustand in der Wechselwirkungsdarstellung sich als Produkt von N Erzeugungsoperatoren zu den durch die $K_1 \dots K_N$ charakterisierten Werten des Viererimpulses (auf Ω_0 angewandt) schreiben läßt¹⁶. Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir als neues „Vakuum“ den Zustand Φ ein und betrachten alle Änderungen relativ hierzu². Dann werden wegen

$$\psi^*(k) \Phi = 0 \text{ und } \psi(k') \Phi = 0 \quad (40)$$

(mit $k = k_1 \dots k_N$ und k' unbesetzter Viererimpuls) $\psi^*(k_i)$ und $\psi(k')$ Vernichtungsoperatoren. Wir treiben also „Löchertheorie“ (in einer nicht-relativistischen Theorie) in dem Sinne, daß alle k_i das „Meer“ der „negativen“ (= besetzten) Zustände und alle k' die positiven Zustände charakterisieren. „Paarerzeugung“ bedeutet jetzt Umwandlung eines k -Elektrons in ein k' -Elektron. Es gibt also Graphen vom Typ der Abb. 3a und b. Definieren wir nun

$$\tilde{S}_+'(1, 2) = -(\Phi, T[\dot{\psi}(1) \dot{\psi}^*(2)] \Phi) \quad (41)$$

und

$$\tilde{A}_+'(1, 2) = (\Phi, T[A(1) A(2)] \Phi),$$

so gelten ohne weiteres die Gln. (11), wenn man S_+' durch \tilde{S}_+' und S_+ durch

$$\tilde{S}_+(1, 2) = -(\Phi, T[\psi(1) \psi^*(2)] \Phi) \quad (42)$$

¹⁵ P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. **26**, 376 [1930].

¹⁶ Die Theorie läßt sich auch noch mit Zuständen der Form $\int \psi^*(1) \dots \psi^*(N) \Omega_0 f(1 \dots N) dx_1 \dots dx_N$ durchführen.

ersetzt. Dies sind bereits die gesuchten Ausgangsgleichungen von Kinoshita und Nambu. Es läßt sich leicht einsehen, daß

$$\tilde{S}_+'(1, 2) = \begin{cases} \sum_{\text{unbes. Zust.}} \tilde{u}_i(1) \tilde{u}_i^*(2), & t_1 > t_2 \\ - \sum_{\text{bes. Zust.}} \tilde{u}_i(1) \tilde{u}_i^*(2), & t_1 < t_2 \end{cases} \quad (43)$$

gilt, wobei die $\tilde{u}_i(x)$ durch Störungsrechnung aus den $u_i(x)$ [vgl. Gl. (31)] hervorgegangen sind. Die $\tilde{u}_i(x)$ haben die Form $\tilde{u}_i(\tau) e^{-i\tilde{\omega}_i \tau}$, und $\tilde{\omega}_i$ ist die durch Störungsrechnung aus ω_i hervorgegangene Energie (Beweise s. Anhang I). Die Gesamtenergie läßt sich aus

$$E = \sum \tilde{\omega}_i \quad (44)$$

(im Prinzip) berechnen¹⁷.

Es ist also sinnvoll, die Funktion

$$\chi(|1 \dots N|) = ||\tilde{u}_i(x_k)|| \quad (45)$$

als eine neue Art von Wellenfunktion zu definieren: denn sie ist wiederum stetig in den x_i , sie gibt für $t_i \rightarrow -\infty$ (bzw. $g \rightarrow 0$) die Slater-Determinante für freie Elektronen und hat (für $t_1 = t_2 = \dots = t_N$) die richtige Zeitabhängigkeit. Sie stellt also eine zweite mögliche Verallgemeinerung des Wellenfunktionsbegriffs dar (vgl. S. 121). Jedoch ist sie nicht mehr brauchbar, wenn die obigen Voraussetzungen fallen gelassen werden (s. Anhang). Die Bedeutung dieser Wellenfunktion liegt darin, daß durch sie formal die Bewegung unabhängiger Elektronen im Feld aller anderen im Sinne einer self-consistent-field-Theorie beschrieben wird. Aus den Gln. (43) und (11c) für \tilde{S}_+' kann man schließen, daß die \tilde{u}_i die (nichtlinearen) Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta\right) \tilde{u}_i(1) \\ = i g^2 \int \Delta_+(1, 3) \tilde{S}_+'(3, 3) dx_3 \tilde{u}_i(1) \\ - i g^2 \int \tilde{S}_+'(1, 3) \Delta_+'(1, 4) \Gamma(3, 5; 4) \tilde{u}_i(5) dx_3 dx_4 dx_5 \end{aligned} \quad (46)$$

erfüllen, die wegen (43) den self-consistent-Charakter besonders deutlich machen und bei Potential-

wechselwirkung direkt die Hartree-Fockschen Gleichungen liefern.

Bei einem Vergleich beider Theorien ist zu beachten, daß die Bethe-Salpeter-Gleichung auch ohne die Voraussetzungen (38) und (39) gültig ist. Hinzu kommt der Vorzug, daß man aus ihr eine Funktion φ berechnen kann, die sämtliche Komponenten des Zustandes Φ zu berechnen gestattet und damit Φ selber liefert (s. Anhang II). Damit kann man auch die Funktion \tilde{S}_+' als bekannt ansehen und die Theorie von Kinoshita und Nambu als Folge der allgemeinen Wellenfunktionstheorie betrachten.

Es ist andererseits denkbar, daß bei der Untersuchung spezieller Beispiele die eine oder die andere Methode bequemer ist.

5. Schluß

Es ist beabsichtigt, diese Theorie auf das Problem der Quantenstatistik wechselwirkender Teilchen anzuwenden. Die Beziehungen zur Theorie von Bohm und Pines¹ werden ebenfalls untersucht werden. Eine Kombination beider Methoden dürfte Hinweise für die praktische Behandlung von Problemen geben.

Herrn Professor Ludwig habe ich für die Förderung dieser Arbeit wiederum sehr zu danken.

Anhang

1. Eigenschaften von $\tilde{S}_+'(1, 2)$

Zunächst ist bekanntlich (wie in der Positronentheorie)

$$\begin{aligned} \tilde{S}_+(1, 2) &= -(\Phi, T[\psi(1) \psi^*(2)] \Phi) \\ &= \begin{cases} \sum_{\text{unbes. Zust.}} u_i(1) u_i^*(2), & t_2 < t_1 \\ - \sum_{\text{bes. Zust.}} u_i(1) u_i^*(2), & t_2 > t_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (A 1)$$

mit durch (31) definierten $u_i(x)$ (dasselbe erhält man für \tilde{S}_+ und $g \rightarrow 0$). Wir nehmen dabei an, daß kein äußeres Feld \tilde{A} vorhanden sei. Weiterhin ist

$$\tilde{S}_+(1, 2) = \begin{cases} \sum_{\substack{k, l \\ \text{unbes. Zust.}}} u_k(1) u_l^*(2) (U(0, 1) \psi^*(k) U(1, -\infty) \Phi_0, U(0, 2) \psi^*(l) U(2, -\infty) \Phi_0), & t_2 < t_1 \\ - \sum_{\substack{k, l \\ \text{bes. Zust.}}} u_k(1) u_l^*(2) (U(0, 2) \psi^*(l) U(2, -\infty) \Phi_0, U(0, 1) \psi^*(k) U(1, -\infty) \Phi_0), & t_2 > t_1 \end{cases} \quad (A 2)$$

¹⁷ Die Verf. geben eine Gleichung an, die ein Integral über die Kopplungskonstante enthält; zu ihrer

Ableitung wird explizit von dem nichtlokalen Lagrange-Formalismus Gebrauch gemacht.

$$\text{mit} \quad \psi(x) = \sum_k \psi(k) u_k(x) \quad (\text{A } 3)$$

(wenn die Voraussetzungen (38) und (39) gemacht werden). Nun gilt für alle t

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu(1)} \tilde{S}_+'(1, 2) = - \frac{\partial}{\partial x_\nu(2)} \tilde{S}_+'(1, 2), \quad (\text{A } 4)$$

wenn man (21) benutzt (die bei $t_1 = t_2$ auftretenden Singularitäten heben sich gerade heraus). Die u_i haben die Form $e^{i(p_i \tau - \omega_i t)}$. Behandeln wir der Einfachheit halber die (p_i, ω_i) als diskret, so wird wegen (A 4)

$$\tilde{S}_+' = \sum f(p_i, \omega_i) e^{i[p_i(\tau_1 - \tau_2) - \omega_i(t_1 - t_2)]} \quad (\text{A } 5)$$

sein. Dies $\tilde{S}_+'(1, 2)$ wird aus dem durch (A 1) bestimmten $\tilde{S}_+(1, 2)$ durch Einschalten der Wechselwirkung hervorgehen. Daraus folgt unmittelbar die Gleichung (43).

Nach (43), (A 2) und (A 3) ist

$$\begin{aligned} \tilde{S}_+'(1, 2) &= - \sum_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ \text{bes. Zust.}}} \tilde{u}_i(\tau_1, -\infty) \tilde{u}_i^*(\tau_2, t_2) \\ &= - \sum_{\text{bes. Zust.}} u_k(\tau_1, -\infty) (U(0, 2) \psi(2) U(2, -\infty) \Phi, \\ &\quad U(0, -\infty) \psi(k) \Phi). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\tilde{u}_k^*(2) = (\Phi(2) \Phi, \Phi_{-k})$$

$$\text{mit} \quad \Phi_{-k} = U(0, -\infty) \psi(k) \Phi$$

eine mögliche Darstellung; Φ_{-k} ist der Zustand, in dem das k -Elektron vernichtet ist. Ferner gilt

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_k^*(x) = E \tilde{u}^*(x) - (E - \tilde{\omega}_k) u_k^*(x) \quad (\text{A } 6)$$

$$\text{d. h.} \quad \tilde{u}_k(x) = e^{i\tilde{\omega}_k t} \tilde{u}_k(\tau).$$

$\tilde{\omega}_k$ gibt den Energiebeitrag des k -Elektrons an. Bei dieser Überlegung ist die sog. Möllersche Relation

$$U(0, -\infty) H_0(-\infty) = H(0) U(0, -\infty) \quad (\text{A } 7)$$

benutzt (s. z. B. Glaser und Zimmermann⁸), die wiederum nur im Teilraum der Zustände freier Teilchen als gültig angesehen werden kann. Als Gesamtenergie folgt sofort (44).

2. Darstellung von Φ aus φ

Man kann für A und ψ bekanntlich Integralgleichungen (Yang und Feldman¹⁸) aufstellen, bei denen die Operatoren A_{in} und ψ_{in} durch

$$\begin{aligned} \psi(\tau, -\infty) &= \psi_{\text{in}}(\tau, -\infty), \\ A(\tau, -\infty) &= A_{\text{in}}(\tau, -\infty) \end{aligned} \quad (\text{A } 8)$$

definiert sind und den wechselwirkungsfreien Operatorgleichungen genügen. Sie hängen mit den ψ der Wechselwirkungsdarstellung durch

$$\psi(x) = U^*(0, -\infty) \psi_{\text{in}}(x) U(0, -\infty) \quad (\text{A } 9)$$

zusammen. Hieraus folgt

$$\psi_{\text{in}}(x) \Omega = 0. \quad (\text{A } 10)$$

Aus den $\psi_{\text{in}}^*(k)$ (Erzeugungsoperatoren) mit

$$\psi_{\text{in}}(x) = \sum \psi_{\text{in}}(k) u_k(x)$$

kann man nach der Becker-Leibfried-Methode den Hilbert-Raum der Streuzustände aufbauen (der mit dem durch die $\psi(k)$ erzeugten unitär äquivalent ist). Betrachten wir nur diesen, so ist klar, daß aus

$$\varphi_{t_i \rightarrow -\infty}(|1 \dots N\rangle) = (\psi_{\text{in}}^*(1) \dots \psi_{\text{in}}^*(N) \Omega, \Phi) \quad (\text{A } 11)$$

alle Komponenten von Φ gewonnen werden können. Denn Φ sollte nach Voraussetzung ein Zustand aus N Elektronen sein, und ein solcher hat nur Projektionen in den Raum

$$\int d\tau_1 \dots d\tau_N f(1 \dots N) \psi_{\text{in}}^*(1) \dots \psi_{\text{in}}^*(N) \Omega.$$

¹⁸ C. N. Yang u. D. Feldman, Phys. Rev. **79**, 972 [1950].

Stationäre magneto-hydrodynamische Stoßwellen beliebiger Stärke

Von R. LÜST

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. **10a**, 125—135 [1955]; eingegangen am 24. Dezember 1954)

Es werden für stationäre magneto-hydrodynamische Stoßwellen das Dichte- und Druckverhältnis, die Richtungsänderung des Magnetfeldes und die Geschwindigkeit hinter der Front in Abhängigkeit von der Machschen Zahl bestimmt. Es zeigt sich, daß drei verschiedene Arten von Stoßwellen in einem Plasma mit Magnetfeld existieren können, die im Grenzübergang zu unendlich schwachen Stößen in Schallwellen bzw. Alfvénische Wellen übergehen. Die aufgestellten Gleichungen werden für ein einatomiges Gas und für verschiedene Stärken und Richtungen des Magnetfeldes als Funktion der Machschen Zahl numerisch gelöst und diskutiert.

In einer früheren Arbeit¹ waren die Grundgleichungen für magneto-hydrodynamische Stoßwellen in einem Plasma mit unendlicher Leitfähig-

keit abgeleitet worden. Wenn man sich auf eine makroskopische Beschreibung solcher Stoßwellen beschränkt, d. h. sich nur für die Dichte, den Druck, die Temperatur, das Magnetfeld usw. vor und hinter der Stoßfront interessiert, so zeigen alle diese Größen beim Durchgang durch die Stoß-

¹ R. Lüst, Z. Naturforsch. **8a**, 277 [1953]. Im folgenden mit I bezeichnet. S. auch F. de Hoffmann u. E. Teller, Phys. Rev. **80**, 692 [1950].